ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

А. К. ТИМИРЯЗЕВ

ПО ПОВОДУ КРИТИКИ РАБОТЫ Н. П. КАСТЕРИНА *[1]

1. Коллективный труд Д. И. Блохинцева, М. А. Леонтовича, И. Е. Тамма и др., посвященный статье Н. П. Кастерина: «Обобщение основных уравнений аэродинамики и электродинамики», вызывает у каждого, внимательно читавшего статью Н. П. Кастерина, ряд серьезнейших недоумений.

1) Упомянутые авторы, указав на трудность анализа работы Н. П. Кастерина только на основе предварительного сообщения, заявляют, что в этом предварительном сообщении будто бы нет «изложения основных идей и методов исследования, с указанием тех конкретных допущений, которые положены автором в основу его (Н. П. Кастерина) рассуждений». После прочтения этих слов невольно возникает вопрос: какой же можно дать анализ научной работы, если не известны: а) основные идеи этого труда, б) метод исследования и в) конкретные допущения, положенные в основу рассуждений.

2) Но пусть читатель начал знакомиться с отзывом шести авторов, не прочтя предварительно статьи Н. П. Кастерина, и пусть он почувствовал на основе сказанного, как трудно дать анализ научной работы, не зная ни ее основных идей, ни методов работы автора, тогда тем более он остановится, как громом пораженный, перед следующими словами отзыва: «Тем не менее статья содержит материал, совершенно достаточный для вынесения вполне определенного, а именно отрицательного, суждения об изложенной в ней теории». (Подчеркнуто нами.— *А. Т.*) Как, спрашивается, возможно вынесение «определенного и притом отрицательного» суждения об изложенной в предварительном сообщении теории, когда выносящие это суждение авторы только что сами заявили, что им не известны ни основные идеи, ни методы исследования, ни даже основные допущения, на которых строятся рассуждения автора теории.

3) Но недоумение читателя достигает высшей точки—о содержании отзыва мы пока еще не говорим,—когда он, ознакомившись с отзывом, видит, что речь идет в нем почти исключительно об основных идеях и методах исследования, т. е. как-раз о том, чего будто бы в докладе Н. П. Кастерина нет! В отзыве так прямо и сказано: «К сожалению ничего подобного мы не находим в статье Н. П. Кастерина». Таким образом недоумения читателя замыкаются

*[1] Печатается по распоряжению академика-секретаря ОМЕН акад. А. Е. Ферсмана.

в круге: в статье Н. П. Кастерина нет указаний на основные идеи его теории,—это не мешает высказать о его теории отрицательное суждение. На основе чего же?—На основе анализа основных идей его теории, о которых было сказано, что они не содержатся в его статье! Круг в самом деле замыкается!

2. Но точно ли, что Н. П. Кастерин в своем предварительном сообщении не указывает на основные идеи, на которых построена его теория, и скрывает от физиков методы своей работы? На поверку оказывается, что изложению этих вопросов посвящены страницы третья, четвертая и половина пятой его предварительного сообщения.

Изложенные на этих страницах основные положения можно для целей нашей статьи кратко сформулировать в следующих семи тезисах.

1) Уравнения Максвелла (электродинамика), выведенные 75 лет тому назад, и уравнения Эйлера (аэродинамика), выведенные 180 лет тому назад, являются только первыми приближениями, не удовлетворяющими тем требованиям, какие предъявляет возросшая точность современных измерений.

2) Все исследование, ставящее себе целью отыскать второе приближение, ведется «не изменяя основ классической механики и физики» (стр. 4).

3) Второе приближение учитывает члены порядка v^2/c^2, где v — скорость движения газа и c — скорость звука (эти члены приобретают большое значение в виду возросших скоростей, применяемых в современной авиации!). Соответственно этому в электродинамике критерием необходимости применять второе приближение является отношение $\frac{w^2}{c^2}=\frac{M^2}{E^2}$, где M и E — напряженности магнитного и электрического полей, c — скорость света, а w — скорость движения электрического поля.

4) Метод решения поставленных задач: использование уравнений Лагранжа, обобщенных для физических систем Гельмгольцем, т. е. находится кинетический потенциал $H = \Pi - K$ (разность потенциальной и кинетической энергии) и составляются уравнения Лагранжа-Гельмгольца (для параметров q_a и скоростей $\dot{q}_a$):

$$\frac{\partial H}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_a} = 0\,. \tag{1}$$

5) При составлении кинетического потенциала используются всеми признаваемые свойства аэродинамического и электромагнитного полей.

6) Поле признается прерывным. В аэродинамике прерывность устанавливается кинетической теорией. В электродинамике прерывность устанавливается существованием элементарного заряда.

7) В процессе вычислений используются натуральные криволинейные ортогональные координаты.

Мы выбрали наиболее существенные указания Н. П. Кастерина на то, что положено им в основу его теории и каким методом он работал.

Для всякого физика—особенно если он знаком с работами Гельмгольца—ясен путь, по которому шел Н. П. Кастерин.

Во всяком случае утверждение авторов отзыва о том, что в предварительном сообщении не указано, на каких основах построена теория Н. П. Кастерина, не соответствует действительности; это косвенно подтверждают и сами авторы отзыва, так как они на двенадцати страницах полемизируют как-раз по поводу основных положений теории Н. П. Кастерина, а откуда же они могли узнать об этих основных положениях, как не из предварительного сообщения? Итак авторы отзыва по существу сами опровергли свое первое утверждение.

Переходим теперь к самому содержанию «критики».

3. Соображения критиков по поводу критерия степени приближения.

Остановимся прежде всего на следующем удивительнейшем замечании критиков: «Так, он считает критерием применимости классических уравнений аэродинамики „отношение квадрата скорости движения газа к квадрату скорости звука в нем v^2/c^2" (стр. 4) и вводит в эти уравнения поправки, пропорциональные v^2/c^2. Между тем совершенно очевидно (?!! *А. Т.*), что применимость уравнения Эйлера не может зависеть от скорости газа, поскольку скорость есть понятие относительное и значение ее зависит от выбора тела отсчета» (!!! Подчеркнуто нами.— *А. Т.*). Ведь этим утверждением аннулируется не только работа Н. П. Кастерина, но и вся классическая механика и физика!

Напомним, что скорости, которые изучаются в классической механике, а также и в работе Н. П. Кастерина, по терминологии Ньютона «истинные» скорости в отличие от «кажущихся». А «истинными» скоростями для системы являются скорости относительно центра инерции этой системы.

Скорость любой планеты по отношению к центру инерции солнечной системы есть именно такая «истинная» скорость, этим скорость определена вполне и от дальнейшего выбора системы отсчета зависеть уже не может. Точно так же и во всякой механической задаче применяющие классическую механику берут за начало координат центр инерции.

Вспомним ранний период развития теории Бора. Какое противоречие получалось, когда брали относительные скорости электрона по отношению к ядру атома водорода, и особенно по отношению к ядру ионизованного атома гелия. Известно также, что это противоречие было устранено одним росчерком пера, когда в согласии с «быстрым разумом Невтоном» стали для электрона брать «истинные» скорости, т. е. скорости по отношению к центру инерции системы электрон—ядро. Тогда и только тогда ридберговская постоянная превратилась в $R = \frac{R_\infty}{1+\frac{m}{M}}$, где $\frac{m}{M}$ — отношение массы электрона к массе ядра.

Итак, поскольку в аэродинамике, основывающейся на механике Ньютона, скорости определяются по отношению к центру инерции и как таковые от дальнейшего выбора системы отсчета не зависят, все рассуждения критиков по этому пункту несостоятельны.

4. То, что сказано критиками в связи с критерием, вызывающим необходимость применения второго приближения в области электродинамики, требует еще более пристального внимания.

Вот что говорится в отзыве на стр. 428: «Совершенно неверен также и критерий, которым руководствуется автор в вопросе о приложимости уравнений Максвелла. Согласно автору, этим критерием „служит отношение квадрата напряжения магнитного поля M к квадрату напряжения электрического поля E, т. е. M^2/E^2" (стр. 4). Согласно автору, уравнения Максвелла применимы лишь при условии $M^2/E^2 \ll 1$; соответственно этому в свои обобщенные уравнения он вводит величины, пропорциональные M^2/E^2 [в уравнении (20) и последующих явно фигурирует величина ω^2 (кстати сказать, не ω^2, а w^2. — *А. Т.*), которая согласно уравнению (19) пропорциональна M^2/E^2]».

Прежде всего критики при изложении взглядов Н. П. Кастерина упустили то, что сказано им в следующих строчках после приведенных нами и отмеченных нами знаком": «Этот электродинамический критерий совершенно точно совпадает, как мы увидим ниже, с аэродинамическим, так как отношение магнитного напряжения к электрическому всегда можно представить как отношение скорости движения электрического поля (w) к скорости света c: $\frac{M^2}{E^2}=\frac{w^2}{c^2}$» .

Почему-то по поводу квадрата скорости движения поля таинственно сказано «явно фигурирует величина ω^2» (т. е. не ω^2, а w^2. — *А. Т.*), а в дальнейшем совершенно правильно сказано, что эта величина (т. е. не ω^2, а w^2.— *А. Т.*) «согласно уравнению (19) пропорциональна M^2/E^2».

Действительно уравнение (19) имеет вид

$$cM = wD_0E, \tag{19}$$

где D_0 — диэлектрическая постоянная эфира — виноват, вакуума! Сославшись на уравнение (19), критики приходят к заключению:

«Таким образом согласно Н. П. Кастерину уравнения Максвелла должны были бы быть вовсе неприменимы к чисто магнитному полю, например полю постоянных магнитов или электромагнитов.

«Это утверждение автора находится в столь кричащем противоречии с основными фактами учения о магнетизме, что установления этого притиворечия в сущности совершенно достаточно, чтобы признать несостоятельной всю вторую электродинамическую часть его работы» (!!! *А. Т.*). К сведению авторов только что высказанных соображений укажем, что уравнение (19) не принадлежит Н. П. Кастерину, оно известно в нашей науке с 1891 г., когда Дж. Дж. Томсон [*1] доказал его совместимость с уравнениями Максвелла! Это уравнение и было им использовано во всех его работах по электромагнетизму, как специальных, так и общедоступных.

Более того, доказательство совместимости уравнения (19) с системой уравнений Максвелла было приведено в 1904 г. Г. А. Лоренцом [*2]. Таким образом, во-первых, упрек авторами брошен не по адресу и, во-вторых, раз критики считают несостоятельными все работы Дж. Дж. Томсона, начиная с 1891 г., а также и работы Г. А. Лоренца, то это утверждение должно же быть чем-нибудь обосновано. Вопрос, как видит читатель, настолько серьезен, что на нем придется остановиться.

Рассмотрим прежде всего, о чем идет речь у Томсона.

[*1] J. J. Thomson, On the Illustration of the Properties of the Electric Field by Means of Tubes of Electrostatic Induction, Phil. Mag. (5), 31, 1891, а также его книга: Notes on Recent Researches in Electricity and Magnetism, Oxford 1893.

В конце 90-х и начале 900-х годов последняя книга была настольной книгой физиков, работавших в области электромагнетизма и сокращенно называлась «III том трактата Максвелла»! Уравнение (19), о котором речь в тексте, применялось Томсоном еще в следующих работах: Momentum in the Electric Field, Phil. Mag., VI Vol., 8, 1904; Corpuscular Theory of Matter, London 1907 (есть русский перевод); Electricity and Matter, 1903 (есть русский перевод) и мн. др.

[*2] Encyclopädie der Matematischen Wissenschaften, B. V, 2, H.— 1. H. A. Lorentz, Maxwell's electromagnetische Theorie, S. 119.

В своей работе 1891 г., а также в книге Notes on Recent Researches... Дж. Дж. Томсон изучает движение фарадеевых трубок в электромагнитном поле. При этом предполагается, что фарадеевы трубки не возникают и не уничтожаются, т. е. Томсон исходит из принципа сохранения электричества и получает:

$$\frac{df}{dt}+u\rho=\frac{d}{dy}\ (ug-vf)-\frac{d}{dz}\ (wf-uh), \tag{2}$$

плюс два других уравнения, получающихся круговой подстановкой. Здесь u, v, w — слагающие скорости движения трубок, $\rho=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}$ — «плотность» заряда (в уравнениях Кастерина $\rho=0$), а f, g и h — слагающие поляризации. Если p, q и r — слагающие плотности тока, то уравнения Максвелла будут иметь вид:

$$\left.\begin{array}{l} 4\pi p=\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz} \\ \dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{3}$$

Если ток рассматривать как ток конвекции $u\rho$, $v\rho$ и $w\rho$ плюс ток смещения df/dt и т. д., то, сравнивая (2) и (3), мы видим, что мы «можем рассматривать движущиеся фарадеевы трубки как дающие начало магнитной силе, слагающие которой α, β и γ даны уравнением:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=4\pi\ (vh-wg) \\ \beta=4\pi\ (wf-uh) \\ \gamma=4\pi\ (ug-vf) \end{array}\right\} \tag{4}$$

Итак фарадеева трубка, когда она движется, производит магнитную силу под прямым углом одновременно и к себе и к слагающей скорости, перпендикулярной к трубке» *[1].

Уравнение (4) в обозначениях Кастерина и будет уравнением (19), т. е. таким образом удар, направленный на Н. П. Кастерина, попал в... Томсона! Развернем теперь стр. 119 статьи Лоренца из цитированной выше Энциклопедии математических наук. Вот что там сказано: «Положим, что $\mathfrak{V}=\mathfrak{W}+\mathfrak{V}_e$, так что $\mathfrak{V}_e$ — относительная скорость электрических линий возбуждения по отношению к материи; тогда на основе (14)

$$\dot{\mathfrak{D}}+\mathrm{rot}\,[\mathfrak{D}\cdot\{\mathfrak{W}+\mathfrak{V}_e\}]=0.$$

Вследствие же (I[1]) и (II) уравнение Максвелла: $\mathrm{rot}\ \mathfrak{H}=\frac{1}{c}(\mathfrak{J}+\underline{\dot{\mathfrak{D}}})$, где $\mathfrak{J}=0$, а $\underline{\dot{\mathfrak{D}}}$ надо взять $=\dot{\mathfrak{D}}+\mathrm{rot}\,[\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{W}]$ и поэтому

$$\mathrm{rot}\ [\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{V}_e]=-c\ \mathrm{rot}\ \mathfrak{H},$$

откуда

$$[\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{V}_e]=-c\ \mathfrak{H}+\mathrm{grad}\ \psi,$$

где ψ — скалярная функция».

Вот выписка из статьи Лоренца, где инкриминируемое Н. П. Кастерину соотношение (19), а по существу соотношение Томсона, выведено в векторной форме. Стало быть удар, направленный по Н. П. Кастерину, попадает также и в Лоренца. Причем в выписке из Лоренца приведено общее решение, содержащее функцию grad ψ.

Почему же у Томсона нет этой функции grad ψ и почему ее нет у Н. П. Кастерина?

*[1] J. J. Tomson, Notes on Recent Researches.... стр. 7 и 8.

Потому что Дж. Дж. Томсон при использовании общего решения опирался на взгляды Ампера, а Н. П. Кастерин — и на теорию Ампера и на классические опыты А. Эйнштейна и Де-Гааза, названные ими «Экспериментальным доказательством амперовых молекулярных токов»*[1].

Вот эти два обстоятельства видимо совершенно упустили из виду шесть критиков, когда они писали следующие слова: «Таким образом согласно Н. П. Кастерину уравнения Максвелла должны были бы быть вовсе неприменимы к чисто магнитному полю, например полю постоянных магнитов или электромагнитов».

Во-первых, уравнение не Кастерина, а Томсона, а, во-вторых, дуализм — постоянный магнит и магнитное поле тока, — дуализм, возникший в связи с открытием Эрштеда 1820 г., уже в том же 1820 г. был устранен гипотезой Ампера, а с 1915 г., после опыта Эйнштейна—Де-Гааза, гипотеза Ампера стала экспериментально установленным фактом!

Таким образом не работа Н. П. Кастерина, а отзыв шести критиков находится в столь кричащем противоречии с основными фактами учения о «магнетизме» и возвращает нас к столь далеким пройденным этапам (временам до Ампера, т. е. к 20-м годам XIX в.), что установления одного лишь этого обстоятельства «совершенно достаточно, чтобы признать несостоятельным» отзыв шести критиков.

5. Вопрос об инвариантности.

В отзыве на стр. 432, после длинных рассуждений и вычислений, связанных с изменением масштаба по оси λ, авторы приходят к замечательному выводу: «В частности обобщенные уравнения автора противоречат галилееву принципу относительности». Это заявление повторяется несколькими строчками дальше. Но вот что любопытно: уравнения Н. П. Кастерина являются уравнениями Лагранжа — Гельмгольца, а эти последние как будто уравнения классической механики, и как таковые они не могут противоречить галилееву принципу относительности!

Этот «анализ» проделан только по отношению к уравнению невихревых движений аэродинамики, причем критиков смущает то обстоятельство, что члены, соответствующие второму приближению, зависят «не только от градиента скорости газа, но и от абсолютного значения этой скорости». Действительно поправочные члены, как это особенно ясно видно из уравнений (4)*[2]

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\left(1-\frac{k-1}{2}\cdot\frac{u^2+w^2}{c^2}\right)\int\frac{dp}{\rho}\right\}+\frac{d}{dt}\ (h_1 u)=0,$$

пропорциональны v^2/c^2; тогда, как совершенно ясно, наряду с градиентом p войдут члены, содержащие и градиент скорости и абсолютную величину скорости. Дело в том, что в текущем газе давление газа обусловлено не только его упругостью, но и величиной, пропорциональной квадрату скорости. Ведь при расчете гидродинамического давления

$$p/\rho=\text{const}-v^2/2$$

также появляются члены с v^2, а наряду с градиентом p тогда появятся члены, содержащие и градиент скорости и абсолютную величину скорости. Поэтому, если авторам отзыва не нравятся члены,

---

*[1] A. Einstein u. W. I. de Haas, Experimenteller Nachweis der Amperschen Molecularströme, Verh. d. Deutschen Physik. Gesellschaft, 17. B., S. 152, 1915.

*[2] Н. П. Кастерин, Обобщение уравнений..., стр. 6.

содержащие квадрат скорости, то тогда, прежде чем опровергать работу Н. П. Кастерина, надо было бы опровергнуть теорему Бернулли о гидродинамическом давлении, выражение сил сопротивления, пропорциональных v^2, и т. д. Боимся только, что такой широкий план критикам не удастся.

6. Вопрос о криволинейных координатах.

Вопрос об употреблении системы натуральных координат с самого начала чрезвычайно запутан. Так, еще до выхода в свет отзыва шести критиков А. Ф. Иоффе в своей статье «О положении на философском фронте советской физики» в ПЗМ, *11—12*, стр. 134, ссылаясь на этот имеющий появиться разбор предварительного сообщения Н. П. Кастерина, заявляет: «С самого начала теория строится на несуществующей криволинейной системе координат».

Получается впечатление, будто криволинейные ортогональные координаты вообще не существуют, хотя они имеются в любом учебнике, например в книге Абрагама-Беккера «Теория электричества», М.-Л., 1936, стр. 48. Книга, которую читает каждый студент!

В этом отношении критики соблюдают бо́льшую точность, так как они добавляют к «ортогональным криволинейным» определение «натуральные», что очень существенно, так как действительно координаты выбираются так, чтобы они органически сливались со специфическими особенностями задачи. Но, не сделав ошибки, допущенной А. Ф. Иоффе, авторы отзыва делают в свою очередь ошибку не менее грубую. Они пишут на стр. 429: «Натуральные координаты были введены старинными математиками для описания движения материальной точки, для чего этот прием законен и целесообразен. Попытка же автора перенести этот прием в аэро- и электродинамику ошибочна» (!!! *А. Т.*). Это утверждение опровергается простыми ссылками на историю физики. Лучше всего для этого перелистать книгу Ламэ «Криволинейные координаты и их разнообразные приложения»*[1]. В лекциях Г. Ламэ на стр. 367 мы читаем следующие слова: «Как мы видели, уравнения с частными производными упругости, преобразованные с помощью различных параметров ортогональных систем, представляются в форме, наиболее подходящей к интегрированию..., поэтому повидимому эта теория (т. е. теория упругости. — *А. Т.*) и этот инструмент (т. е. теория криволинейных ортогональных координат. — *А. Т.*) составляют две части единого целого и ни одна из этих частей не может быть рассмотрена без другой; это—род естественного слияния, которое оправдывает тот объем, который мы придали последней части курса».

Уже из этого отрывка ясно, что натуральные криволинейные координаты применялись старинными математиками не только «для описания движения материальной точки», а главным образом в теории упругости, а отсюда до гидро- и аэродинамики не так уж далеко. Но послушаем дальше, что говорил Ламэ в своих лекциях. На страницах предисловия XII и XIII мы читаем следующее: «Действительно, семейства поверхностей, рассматриваемые отдельно или в совокупности, бесспорно прольют свет на статическое состояние в различных ветвях математической физики, например равновесие температур в твердых телах или упругое равновесие в весомых средах.

«Но для того, чтобы с успехом изучать и полностью определить динамическое состояние, надо будет рассмотреть изменения сопря-

*[1] Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications par G. Lamé, Paris, 1859.

женных поверхностей, их последовательные преобразования, надо знать, как изменяются изотермические поверхности, поверхности изостатические от одного момента к последующему. Эти новые исследования разъяснят и дополнят бо́льшую часть задач небесной механики, в с ю г и д р о д и н а м и к у (подчеркнуто нами. — *А. Т.*), теорию распространения волн на поверхности жидкостей, распространение звуковых волн или акустику, распространение световых волн или теорию света, наконец законы нагревания и охлаждения весомых сред. Это целая четвертая ветвь трансцендентной геометрии, которую еще едва можно предвидеть и обрисовать и которую нужно создать, прежде чем математическая физика, на сегодня приостановившаяся, сможет достигнуть новых и решающих успехов»[*1]. Но то исключительно большое значение, которое придавал Ламэ натуральным криволинейным координатам, — натуральным потому, что для каждой задачи подбирается своя система, наиболее отвечающая самому содержанию задачи, — еще более ярко выступает в следующих заключительных словах упомянутого выше курса лекций Ламэ: «Если кто-нибудь найдет странным и необычным, что можно было целый курс математики обосновать на одной идее, связанной с системой координат, то мы ему заметим, что именно эти системы координат характеризуют фазы или этапы науки. Если бы не были открыты прямолинейные координаты, то алгебра, быть может, находилась бы сейчас в том положении, в каком ее оставили нам Диофант и его комментаторы, и мы бы не имели ни исчисления бесконечно-малых, ни аналитической механики. Без введения сферических координат небесная механика была бы совершенно невозможной. Без эллиптических координат знаменитые геометры не могли бы разрешить значительного числа важных вопросов, предъявляемых этой теорией (небесной механикой. — *А. Т.*), которые бы так и остались не решенными, и господство этих специальных координат третьего рода только что началось. Но, когда все решения задач небесной механики будут преобразованы и дополнены, придется серьезно заняться математической физикой и земной механикой. Тогда наступит господство различных криволинейных координат, которые одни смогут помочь нам приступить к этим новым вопросам во всей их всеобщности. Эта эпоха наконец наступит, но очень не скоро: те, кто первыми указали на эти новые инструменты, не будут уже в живых, и их имена будут совершенно забыты, разве только какой-нибудь геометр-археолог воскресит их имена. А впрочем, не все ли равно, раз наука пошла вперед!» (стр. 367—

[*1] Приводим французский текст: «En effet, les familles de surfaces, considérées isolement ou par association, éclaircissent incontestablement l'état statique, dans diverses branches de la physique mathematique, tel que l'équilibre des températures dans les corps solides, ou l'équilibre d'élasticité dans les milieux pondérables.

Mais, pour étudier avec succès, et definir complètement l'état dynamique il faudrait considérer les variations des surfaces conjuguées, leurs transformations succesives, savoir comment se modifient les surfaces isothermes, les surfaces isostatiques, d'un instant au suivant. Nouvelle étude, que éclaircirait et compléterait la plupart des problèmes de la mécanique céleste, toute l'hydrodynamique, la propagation des ondes à la surface des liquides, celles des ondes sonores ou l'acoustique, celle des ondes lumineuses ou la théorie de la lumière, enfin les lois de l'échauffement et du refroidissement des milieux pondérables. C'est toute une quatrième branche de la géometrie transcendante, à peine entrevue, à peine ébauchée, qu'il faudra créer, avant que la physique mathématique, aujourd'hui stationnaire puisse faire des progrès nouveaux et définitifs».

368)*[1]. Мы привели эти в высшей степени интересные мысли великого геометра, чтобы показать, насколько непродуманным и необоснованным является заявление критиков: «Натуральные координаты были введены старинными математиками для описания движения материальной точки, для чего этот прием законен и целесообразен Попытка же автора перенести этот прием в аэро- и электродинамику ошибочна» (*! А. Т.*).

Остановимся теперь на существе вопроса о применимости натуральных криволинейных координат,— этот вопрос был, как мы видим, затемнен соображениями критиков, идущими в разрез со всей историей физики. Для выяснения вопроса мы воспользуемся замечательно ясными и простыми рассуждениями покойного Н. Е. Жуковского в его магистерской диссертации «Кинематика жидкого тела»*[2].

Исследуя течение жидкости, Н. Е. Жуковский строит линии тока, а из линий тока «трубки тока», ограничивающие жидкие струйки. Таким образом движение жидкости в течение бесконечно-малого промежутка времени может быть приведено к течению струек внутри трубкообразных поверхностей. Какими геометрическими свойствами обладают струйки, текущие в этих трубкообразных поверхностях? Если мы обозначим через α, β и γ косинусы углов, которые образует направление скорости точек жидкости с осями координат, то дифференциальные уравнения линий тока будут

$$\frac{dx}{\alpha}=\frac{dy}{\beta}=\frac{dz}{\gamma}. \tag{1}$$

Если существует семейство поверхностей, ортогональных этим линиям тока, то его дифференциальное уравнение будет

$$\alpha\,dx+\beta\,dy+\gamma\,dz=0. \tag{2}$$

Это так называемое «тотальное» уравнение интегрируется, если удовлетворено условие*[3]:

$$\alpha\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)+\beta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)+\gamma\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)=0. \tag{3}$$

Н. Е. Жуковский дает изящную геометрическую интерпретацию условия (3). Если линии тока идут по поверхности струйки, не закручиваясь, то линии, ортогональные к линии тока, будут представлять систему бесконечно-малых замкнутых линий (фиг. 1). Если

*[1] «Si quelque personne trouvait étrange et singulier, que l'on ait pu fonder un cours de mathématiques, sur la seule idée des systèmes de coordonnées, nous lui ferions remarquer, que ce sont précisément ces systèmes, qui caractérisent les phases ou les étapes de la science. Sans l'invention des coordonnées rectilignes, l'algèbre en serait peut être encore au point où Diofante et ses commentateurs l'ont laissée, et nous n'aurions ni le calcul infinitésimal, ni la mécanique analytique. Sans l'introduction des coordonnées sphériques la mécanique céleste était absolument impossible. Sans les coordonnées elliptiques d'illustrés géometres n'auraient pu résoudre plusieurs questions importantes de cette théorie, qui restaient en suspens, et le règne de ce troisième genre de coordonnées speciales ne fait que commencer. Mais quand il aura transformé et completé toutes les solutions de la mécanique céleste, il faudra s'occuper sérieusement de la physique mathématique ou de la mécanique terrestre. Alors viendra nécessairement le règne des coordonnées curvilignes quelconques, qui pourront seules aborder des nouvelles questions dans toute leur généralité. Oui, cette époque definitive arrivera, mais bien tard, ceux qui, les premiers, ont signalé ces nouveaux instruments, n'existeront plus et seront complétement oubliés; à moins que quelque géometre archéologue ne ressusite leurs noms. Eh, qu'importe, d'ailleurs si la science a marché!» l. c., pp. 367—368.

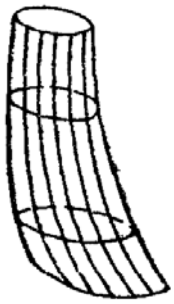
*[2] Н. Е. Жуковский, Полн. собр. соч., М.-Л., 1935, т. II, стр. 78.

*[3] См. например J. A. Serret, *Calcul intégral*, Paris, 1900, p. 616—617.

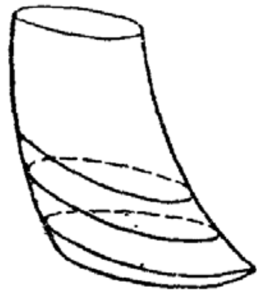
же линии тока будут закручиваться, как на фиг. 2, то ортогональные к ним линии представят систему винтовых линий. Далее Н. Е. Жуковский рассматривает один оборот винтовой линии и показывает, что «шаг» винта

$$h=\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)\alpha+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\beta+\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\gamma\right]\cdot f,$$

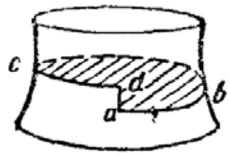
где f — поверхность $abcd$ (фиг. 3); вычислено это выражение с точностью до членов третьего порядка.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Итак условие (3) есть условие, что «шаг» винта $=0$, т. е. что мы имеем случай, изображенный на фиг. 1, и потому возможно проведение ортогональных поверхностей.

Этот вопрос был рассмотрен В. Бьеркнесом в его «Physikalische Hydrodynamik», Berlin, 1933.

Бьеркнес исходит из того, что в общем случае линии, изображающие векторное поле, «скручены, как волокна нити» [«Jedes Bündel dieser Kurven ist wie Fiebern eines Faden tordiert» (стр. 7)]. Но дальше ставится ряд условий, которым должны удовлетворять эти линии для того, чтобы они изображали различные виды векторного поля. Так на стр. 13 он дает условие $\mathbf{B}$ curl $\mathbf{B}=0$ (т. е. рассмотренное уже нами условие существования ортогональной поверхности) в качестве дифференциального уравнения «нормального к поверхности» или «дважды ламелларного»*[1] вектора: «Dies ist die Differentialgleichung des flachen normalen oder des zweifach lamellaren Vektors».

Наконец на стр. 768 Бьеркнес сообщает, что найденные им в 1897 г. законы возникновения вихрей он опубликовал, убедившись, что все векторы, с которыми ему пришлось иметь дело, удовлетворяют условию $\mathbf{B}$ curl $\mathbf{B}=0$. Вот его слова: «После примыкающего к этой работе исследования дважды ламелларных векторов (дифференциальное уравнение которых $\mathbf{B}$ curl $\mathbf{B}=0$), которые появляются при всех применениях этих законов, я опубликовал оба связанных между собой исследования» [«Nach einer anschliessenden Untersuchung der zweifach lamellaren Vektoren, die bei allen Anwendungen der Sätze auftreten, publiezierte ich die beiden zusammengehörigen Abhandlungen: V. Bierknes: Zur Theorie gewisser Vektorgrössen, V. Bierknes: Ueber die Bildung von zirkulationsbewegungen und Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten, Kristiania (Oslo) 1898»].

Итак, Бьеркнес показал, что для угловой скорости вихря условие Ω curl $\Omega=0$ выполняется, и стало быть применение натуральных координат законно. А ведь уравнения электродинамики тождественны с уравнениями вихревой области в аэродинамике для сверх-газа!

*[1] Терминология Бьеркнеса.

Разве не законно предположение, что те же координаты можно применять и в электродинамике? Впрочем мы считаем, что приведенных соображений вполне достаточно, остальное скажет сам Н. П. Кастерин в своем ответе, а пока мы поставим все-таки шести авторам один вопрос: какие существуют электромагнитные явления, которые бы убедили нас в том, что вектор E — напряженность электрического поля — вектор закручивающийся? За всякие указания будем чрезвычайно благодарны! Или, может быть, в самом деле есть уже факты, свидетельствующие о том, что линии вектора электрического поля «скручены, как волокна нитки»?!

Итак, по всем рассмотренным нами пунктам «критика» оказалась несостоятельной, и это именно те пункты, которые сами критики объявили несуществующими, так как эти пункты касаются идей теории и метода работы ее автора.

7. Остается обратить внимание на специфические методы «критики». Как правило критики подменяют мысль автора другой и торжественно опровергают то, чего автор не говорил. Рассмотрим примеры.

а) Критики утверждают: «В частности он (Кастерин) почему-то считает парадоксальным, что в связи с увеличением скорости газа по мере приближения к вихрю плотность и давление его убывают...».

У автора сказано: «В случае уравнения Эйлера, как известно, получается парадоксальный результат, именно: кинетическая энергия этого невихревого движения, отнесенная к единице длины вихря, стремится к логарифмической бесконечности...».

Таким образом энергия подменяется плотностью!

б) Авторы отзыва пишут:

«Нельзя не отметить противоречащего элементарным основам математики утверждения автора (стр. 14), что интеграл дифференциального уравнения (2′)

$$\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2\ \sin\varphi E_r)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\,(r\sin\varphi E_\varphi)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\,(rE_\vartheta)=0$$

имеет вид:

$$(r^2\ \sin\varphi E_r)\ (r\ \sin\varphi E_\varphi)\ (rE_\vartheta)=A_0^3\text{»}\,.$$

На самом деле у автора сказано:

«Уравнение с частными производными (2′) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, если мы примем во внимание, что оно имеет место только в пространстве, занятом полем. Интеграл его (т. е. преобразованного уравнения, приведенного к обыкновенному, а не с частными производными) имеет вид:

$$(r^2\ \sin\ \varphi E_r)\ (r\ \sin\varphi E_\varphi)\ (rE_\vartheta)=A_0^3\text{»}\,.$$

Таким образом противоречие «элементарным основам математики» получается путем подсовывания автору того, чего он не писал!

в) Таким же образом фабрикуется «элементарная математическая ошибка» на стр. 433. Критики пишут: «Если, как это утверждает автор, вектор $\mathbf{E}$ направлен по оси λ, то

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{\partial E\mathbf{1}}{\partial t}=\mathbf{1}\ \frac{\partial E}{\partial t}+E\,\frac{\partial\mathbf{1}}{\partial t}\,,$$

где $\mathbf{1}$ — единичный вектор по оси λ, а E — численное значение вектора $\mathbf{E}$. Между тем автор в уравнениях (15*) и (16*) сохраняет лишь первый член правой части этого выражения, не учитывая второго, тогда как направления осей λ, μ, ν по определению не являются постоянными и изменяются во времени вместе с изменением поля». Во-первых, нигде не сказано в тексте, что рассматриваются случаи, когда направления λ, μ, ν изменяются со временем, а, во-вторых, как это обычно делается в механике, в случае меняющихся направлений движущиеся оси λ, μ, ν в данный момент приводятся к совпадению с неподвижными, отнесенными к центру инерции, аналогично тому, как система линий тока является изображением стационарного процесса для длительных периодов, в случае же нестационарного процесса эта система изображает состояние движения за бесконечно-малый промежуток времени. (См. например Н. Е. Жуковский, Собр. соч., т. II, стр. 78.)

8. Рассмотрим наконец «недоразумение» совершенно исключительного порядка. На стр. 434 сказано: «Если бы автор пользовался обычной системой координат, то нелепость этого уравнения (17) была бы совершенно очевидной. В самом деле, в случае плоской линейно-поляризованной волны его система координат совпадает с обычной декартовой, поэтому $\sigma_\lambda = 1$ и уравнение (17) сводится к уравнению $D_0 E = 4\pi\varepsilon$, т. е. к утверждению, что в каждой точке поля волны напряженность E имеет постоянное и притом универсальное значение $\frac{4\pi\varepsilon}{D_0}$!». Знак «!» принадлежит критикам.

Какое же это уравнение (17)? Это уравнение, связывающее элементарный поток электрической индукции с элементарным зарядом $4\pi\varepsilon = \sigma_\lambda E_\lambda D_0$, где σ_λ, как указано на стр. 6, третья строка снизу, есть площадь сечения вихря или фарадеевой трубки. Почему сечение трубки или вихря в декартовых координатах $dy\,dz$ должно равняться единице, — это тайна, которую едва ли кто когда-либо узнает! Укажем только, что если произведение двух величин равно постоянной, то это не значит, что каждая из них не может изменяться! Неужели критики серьезно не представляют себе, что сечение фарадеевой трубки может быть и функцией координат и функцией времени даже в декартовых координатах! Если следовать «методу» критиков, то из уравнения непрерывности

$$\frac{D(\rho v)}{Dt} = 0,$$

где $v = \partial x \,\partial y \,\partial z$ (см. например H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, § 7, S. 5, Leipzig, 1907) можно вывести следствие: если v выражено в декартовых координатах (а не в несуществующих, по мнению критиков, криволинейных), то $v = 1$ и тогда $D\rho/Dt = 0$! От этих выводов критиков не спасает умышленная замена $\sigma_\lambda = h_2 h_3\, d\mu\, d\nu$ через $\sigma_\lambda = h_2 h_3$ вопреки тому, что ясно написано в предварительном сообщении Н. П. Кастерина на стр. 6, третья строка снизу, и повторено на стр. 9, пятая строка сверху.

9. Итак, по всем пунктам критика оказалась несостоятельной. Чем объяснить подобное явление? Мы думаем, что объяснение кроется в том, что физики разделились сейчас на два лагеря. Одни считают электромагнитное поле физической реальностью, они считают, что в поле происходят процессы, имеющие материального носителя. Другие считают, что никакого материального носителя электромагнитное поле не имеет, что это фикция, а то и просто только «удобная форма описания физических явлений». Мы сейчас увидим, что «недоразумения» критиков, связанные с теорией Н. П. Кастерина, непосредственно вытекают из философской установки одного из них, именно Я. И. Френкеля. Эта установка высказана им

на дискуссии о природе электрического тока еще в 1930 г. Вот эта установка:

«Конечно вы можете, введя понятие поля, сказать, что между первым и вторым электронами имеется это поле, силовые линии которого проходят через поверхность раздела, но вы можете, с другой стороны, сказать, что поле это не является существенно необходимым для описания взаимодействия. Здесь не может быть никакой физической проблемы, здесь вопрос об удобстве описания — будем ли мы описывать действие непосредственно или с помощью представления о поле. Иное дело, когда ставят себе вопрос о том, существует ли это поле в пустоте или же оно связано с какой-нибудь материальной средой. На этот вопрос можно дать совершенно определенный ответ. С моей точки зрения — ответ отрицательный: никакой промежуточной среды, с которой это поле было бы связано, никакого материального носителя поля не существует. Мы имеем пустое пространство, в которое вкраплены отдельные электроны, действующие друг на друга на расстоянии. Это дальнодействие можно описать с помощью электромагнитного поля. Для того чтобы еще раз подчеркнуть чисто вспомогательный характер электромагнитного поля, я приведу еще пример из механики. Описание движения какой-либо частицы вокруг другой частицы может быть целиком осуществлено, если мы будем пользоваться двумя только понятиями: понятием силы и понятием *движения*. Но мы можем ввести еще ряд других понятий, например кинетическую и потенциальную энергию, понятие момента количества движения и т. д. Если вы спросите меня — существует ли реально кинетическая энергия, т. е. величина, измеряемая произведением $mv^2/2$, то я отвечу, что она существует, поскольку вы ее выдумали, так же как существуют музыкальные и литературные произведения, являющиеся продуктом человеческого творчества. Она является вспомогательным представлением, которым вы пользуетесь для описания движения». (Электричество, стр. 428 (10), май 1930.)

Что весь отзыв написан именно с этих позиций, указывает заявление, сделанное критиками на стр. 434:

«При переходе к уравнению (18) автор вводит новую величину w, которую в дальнейшем называет „нормальной скоростью поля" и которую он считает отличной как от скорости распространения поля c, так и от скорости движения электрических зарядов, которые вообще в его основных уравнениях не фигурируют. С точки зрения современной теории эта величина w, как и появляющаяся в дальнейшем величина u, лишена какого бы то ни было физического смысла; сам же автор не указывает, какое физическое содержание он вкладывает в эти величины, так что все производимые с ними операции остаются совершенно невразумительными» *(!! А. Т.)*

Во-первых, к сведению авторов, полученное из (17) выражение (18) есть не новое открытие Н. П. Кастерина, а вывод, сделанный Томсоном в 1891 г. и повторенный Лоренцом в 1904 г., как мы уже говорили выше. А, во-вторых, критики считают не имеющими физического смысла скорости фарадеевой трубки, соответствующей вихрю в аэродинамике, w — нормальную, т. е. перпендикулярную к направлению трубки, и u — параллельную ее длине, совпадающую с осью вихря или фарадеевой трубки. Вот эта скорость и учет движения, соответствующего этой скорости, и есть то новое, что внес Н. П. Кастерин. Но в том-то и дело, что критики считают поле локализованным в пустоте, они отрицают реальность фарадеевой трубки и потому затрудняются приписать какой-либо смысл слагающим скорости движения трубки, и понятно почему: раз по их мнению никакого материального носителя поля нет, то как этот несуществующий носитель может двигаться?

Правильность нашего заключения подтверждается следующими словами в приведенном выше отрывке. Именно, критики удивляются, что Н. П. Кастерин считает скорость w «отличной как от скорости распространения поля c, так и от скорости движения электрических зарядов».

Скорость чего-либо, кроме волн (не имеющих материального носителя) и зарядов, с точки зрения лиц, отрицающих физическую реальность поля, есть бессмыслица. Все сказанное как нельзя лучше подтверждает правильность и своевременность поставленных В. Ф. Миткевичем вопросов.

Вопросы В. Ф. Миткевича затрагивают не только наши истолкования тех или иных физических явлений, но и самое существо физических теорий, и, что еще важнее, они ставят перед нами задачу: как двигаться вперед в науке, в какую сторону развивать физическую теорию.

Говоря о той гораздо более глубокой аналогии, которая установлена Н. П. Кастериным между вихревым движением и электромагнитным полем, критики заявляют: «Разделяя чисто механистическую точку зрения, он выдвигает гипотезу об аэродинамической природе электромагнитного эфира (добавим от себя — и доказывает тем, что уравнения оказываются тождественными! — *А. Т.*), считая, что к эфиру применимы обобщенные им уравнения аэродинамики и что отличие эфира от обычных газов сводится лишь к отличию в численном значении адиабатного коэффициента K ($K=2$)». Вот это «отличие сводится лишь» многого стоит! Неужели критики не понимают, что этим объясняется крах всех механистических попыток построить эфир по образу и подобию известных в механике и физике тел. Ведь газа с адиабатным коэффициентом $K=2$ мы не знали до сих пор. Вот в этой количественной разнице и кроются качественные отличия «сверх-газа» — эфира от всех нам известных тел. Вот почему и были неудачны до сих пор и будут впредь неудачны все механистические попытки построить модель эфира.

«Итак, тысячи лет д о г а д к а насчет эфира существует, оставаясь до сих пор догадкой. Но уже теперь в 1 000 раз больше п о д к о п о в готово, подводящих к решению вопроса, научному определению эфира» *[1].

Когда открываются новые «подкопы», как это имеет место в замечательных работах Н. П. Кастерина, физики-материалисты торжествуют победу, физики же идеалистического толка теряют самообладание и пишут несостоятельные «критики», подобные разобранной нами в настоящей статье, и всеми силами пытаются затормозить победное шествие науки.

Москва, 28 февраля 1938

---

*[1] В. И. Л е н и н. Конспект лекций Гегеля по истории философии. Философские тетради, стр. 261.